Soma das potências de números naturais

Eduardo S. Dobay

02 de setembro de 2010

1 Soma de n^2

Denotamos por $S_2(n)$ a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais:

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 \tag{1}$$

Lembremos do fato de que todo quadrado, digamos, de um número natural j é igual à soma dos j primeiros ímpares, que indexamos pelo índice k que corre de 1 a j:

$$j^2 = \sum_{k=1}^{j} (2k-1) \tag{2}$$

(Para verificar isso, use a fórmula de soma para $1+2+\cdots+k = S_1(k)$ e substitua no lado direito da equação acima.)

Com isso, podemos substituir essa expressão para j^2 na soma em (1):

$$S_2(n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} (2k-1) \tag{3}$$

Veja que a somatória se estende sobre os (j,k) tais que $1 \le k \le j \le n$. Observe também que o somando só depende de k; a parcela $(2k-1)$ é somada para todo j entre k e n, ou seja, $(n-k+1)$ vezes. Dessa maneira, eliminamos uma das somatórias, obtendo

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)(2k-1) \tag{4}$$

Agora o lado direito pode ser rearranjado:

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{k=1}^{n} \left[-2k^2 + (2n+3)k - (n+1)\right] \\ &= -2\sum_{k=1}^{n} k^2 + (2n+3)\sum_{k=1}^{n} k - (n+1)\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= -2S_2(n) + (2n+3)S_1(n) - n(n+1) \end{aligned} \tag{5}$$

Isolando $S_2(n)$ e substituindo a conhecida fórmula $S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$, temos

$$3S_2(n) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+3) - n(n+1)$$

$$\boxed{S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \tag{6}$$

2 Soma de n^3

Denotamos, analogamente, por $S_3(n)$ a soma dos cubos dos n primeiros números naturais:

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 \tag{7}$$

Observe que podemos escrever cada cubo em termos de das somas S_1. Começamos por

$$(j+1)^3 = j^3 + 3j(j+1) + 1 = j^3 + 6S_1(j) + 1 \tag{8}$$

e vemos, convencionando $S_1(0) = 0$, que

$$j^3 = \sum_{k=0}^{j-1} \big(6S_1(k) + 1\big) \tag{9}$$

A somatória do segundo termo é igual a j; a somatória do primeiro termo pode ser começada de $k=1$ já que $S_1(0) = 0$, e substituímos aqui a expressão de S_1:

$$j^3 = j + 3\sum_{k=1}^{j-1} k(k+1) \tag{10}$$

Agora devemos somar a última expressão para j de 1 até n. O primeiro termo já conhecemos; vamos analisar o segundo:

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{j=1}^{n} j + 3\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} k(k+1) \tag{11}$$

A segunda somatória corre pelos pares (j,k) com $1 \le k < j \le n$. Novamente, o somando só depende de k; a cada k correspondem as parcelas com j indo de $k+1$ até n, num total de $n-k$ parcelas, de modo que

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{2}n(n+1) + 3\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(n-k) \tag{12}$$

A soma em k pode ser estendida até n em vez de $n-1$, devido ao fator $(n-k)$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} j^3 &= \frac{1}{2}n(n+1) + 3\sum_{k=1}^{n} (nk + (n-1)k^2 - k^3) \\ S_3(n) &= \tfrac{1}{2}n(n+1) + 3nS_1(n) \\ &\quad + 3(n-1)S_2(n) - 3S_3(n) \end{aligned} \tag{13}$$

Podemos aí substituir S_1 e S_2 e isolar S_3 para obter

$$\boxed{S_3(n) = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2} \tag{14}$$