A seqüência de somas dos divisores de um número

Eduardo S. Dobay

31 de dezembro de 2007

Introdução

Todo número natural $x > 1$ pode ser decomposto em um número finito n de fatores primos a_i, $1 \leq i \leq n$. Cada fator primo de x tem uma multiplicidade m_i, que é o máximo inteiro m tal que $(a_i)^m$ é divisor de x. Isso também pode ser representado como:

$$x = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{m_i} \tag{1}$$

Dados os n fatores primos de x e suas multiplicidades, definimos:

- $N(x)$ como o número total de fatores que devem ser multiplicados para que o resultado seja x. Por exemplo, considerando $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, temos $N(100) = 4$.
- $S(x)$ como a soma de cada fator tantas vezes quantas ele aparece na decomposição de x em fatores primos. Repetindo o mesmo exemplo, $S(100) = 2 + 2 + 5 + 5 = 14$.

Matematicamente, temos

$$N(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad\qquad S(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$$

A seqüência

Dado um número natural $x_0 > 1$, definimos uma seqüência $d(x_0) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na qual cada elemento é igual à soma dos fatores do anterior, começando por x_0:

$$d(x_0) = (x_0, S(x_0), S(S(x_0)), \ldots).$$

A partir dessa, definimos a *seqüência do número de fatores relativa a* x_0, $D(x_0) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, na qual cada elemento é a soma dos fatores do elemento correspondente (de mesmo índice) da seqüência acima — ou seja, $b_n = N(a_n)$:

$$D(x_0) = (N(x_0), N(S(x_0)), N(S(S(x_0))), \ldots).$$

Por exemplo, a seqüência do número de fatores relativa a $x_0 = 100$ pode ser construída da seguinte maneira:

- $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Há quatro fatores (este, 4, é o primeiro número da seqüência) e a sua soma é 14.
- Tomamos a soma obtida no passo anterior, $14 = 2 \cdot 7$. Há dois fatores (2 é o segundo elemento da seqüência), cuja soma é 9.
- Repetimos o processo, obtendo um novo número de fatores (o próximo elemento da seqüência) e uma nova soma dos fatores (que será utilizada no próximo passo).

Ao final do processo, obtemos:

n	a_n	$S(a_n)$	$N(a_n) = b_n$
1	$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$	14	4
2	$14 = 2 \cdot 7$	9	2
3	$9 = 3 \cdot 3$	6	2
4	$6 = 2 \cdot 3$	5	2
5	$5 = 5$	5	1
6	$5 = 5$	5	1
…	…	…	…

A seqüência propriamente dita corresponde à última coluna da tabela. Perceba que sempre que $n \geq 5$, temos $a_n = 5$ — diremos, por isso, que a seqüência da soma de fatores (a_n) converge para 5. Da mesma maneira, a seqüência do número de fatores, (b_n), converge para 1:

$$D(100) = (4, 2, 2, 2, 1, \ldots)$$

Notação

Serão também utilizadas as seguintes notações:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos números naturais.
- $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$, o conjunto dos números primos.
- $C = \mathbb{N} - (\mathbb{P} \cup \{1\})$, o conjunto dos números compostos.

Conjectura

Será que para todo $x_0 > 1$ é verdade que $D(x_0)$ converge para 1? Ou, equivalentemente, será que $d(x_0)$ converge para um número primo?

Verifica-se que *não* para $x_0 = 4 = 2 \cdot 2$, pois

$$\begin{aligned} d(x_0) &= (4, 4, 4, \ldots) \\ D(x_0) &= (2, 2, 2, \ldots) \text{ converge para } 2 \end{aligned}$$

Será que há mais algum x_0, tal que $d(x_0)$ não converge para 1?

Veremos a seguir que *não*, como conseqüência direta do seguinte teorema:

Teorema 1. Todo número natural $x \in C - \{4\}$ tem a seguinte propriedade $P(x)$:

$$P(x) = x \in \mathbb{P} \text{ ou } P(S(x))$$

A demonstração desse teorema será feita a partir de certos resultados que são enunciados e demonstrados a seguir.

Lema 1. *Dados $x, y \in \mathbb{N}$, $x > 2$ e $y \geq 2$, vale $xy > x + y$.*

Demonstração.

$$xy - (x + y) = y\left(x - \frac{x}{y} - 1\right) = y\left[x\left(1 - \frac{1}{y}\right) - 1\right] \tag{2}$$

Para $y \geq 2$, tem-se

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \text{ e portanto } 1 - \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2}.$$

Como $x > 2$, segue que

$$x\left(1 - \frac{1}{y}\right) > 1$$

Substituindo na equação (2), vê-se diretamente que $xy - (x + y) > 0$, que equivale à desigualdade procurada. ■

Lema 2. *Dado um conjunto de n números naturais $a_1, \ldots, a_n$, todos maiores que 2, vale*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Demonstração. Vamos usar indução sobre n. O caso $n = 2$ corresponde ao Lema 1; agora seja $n > 2$. Pela hipótese de indução,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} < a_1 a_2 \cdots a_{n-1}.$$

Pela desigualdade do Lema 1,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n < (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_n.$$

Utilizando a hipótese de indução,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})a_n < (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})a_n.$$

Reunindo essas duas igualdades, temos

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n < (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})a_n,$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 3. *Dado qualquer número natural* $m > 2$*, tem-se*

$$2^m > 2m.$$

Demonstração, por indução em m. Para $m = 3$, a desigualdade é imediata: $2^3 = 8 > 6 = 2 \cdot 3$. Agora seja $m > 3$. Por hipótese, tem-se $2^{m-1} > 2(m-1)$. Assim,

$$2^{m-1} \cdot 2 = 2^m > 2(m-1) \cdot 2 = 4m - 4 = 2m + 2(m-2)$$

Como $m > 2$, tem-se $2(m-2) > 0$, e portanto

$$2^m > 2m,$$

como queríamos demonstrar. ■

Uma forma "fraca" desse lema é a seguinte: para $m \in \mathbb{N}$, tem-se

$$2^m \geq 2m.$$

A verificação é imediata para $m = 1$ e $m = 2$.

Afirmação 1. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ e uma seqüência de n números naturais a_i, $1 \leq i \leq n$, com $a_i > 2$, vale

$$2^m \prod_{i=1}^{n} a_i > 2m + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Demonstração. Pelo Lema 1, tem-se

$$\underbrace{2^m}_{\geq 2} \underbrace{(a_1 a_2 \cdots a_n)}_{>2} > 2^m + (a_1 a_2 \cdots a_n).$$

Pelo Lema 2, tem-se

$$2^m + (a_1 a_2 \cdots a_n) > 2^m + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Pela forma fraca do Lema 3, tem-se

$$2^m + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq 2m + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Reunindo essas três desigualdades, tem-se, como queríamos demonstrar,

$$2^m a_1 a_2 \cdots a_n > 2m + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

■

Afirmação 2. Dados $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência de n números naturais a_i, $1 \leq i \leq n$, com $a_i > 2$, e uma seqüência de expoentes naturais m_i, $0 \leq i \leq n$, vale

$$2^{m_0} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} > 2m_0 + a_1 m_1 + \ldots a_n m_n.$$

Demonstração. Podemos tomar uma seqüência $(b_1, \dots, b_N)$, com

$$N = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

e estabelecer uma relação entre as seqüências (a_i) e (b_i):

$$\begin{aligned}
&b_1 = \cdots = b_{m_1} = a_1\\
&b_{m_1+1} = \cdots = b_{m_1+m_2} = a_2\\
&\vdots\\
&b_{m_1+\cdots+m_{n-1}+1} = \cdots = b_{m_1+\cdots+m_n} = a_n
\end{aligned}$$

Dessa maneira, temos

$$\begin{aligned}
a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} &= b_1 \cdots b_N\\
a_1 m_1 + \cdots + a_n m_n &= b_1 + \cdots + b_N
\end{aligned}$$

e, pela Afirmação 1,

$$2^{m_0} b_1 \cdots b_N > 2m_0 + b_1 + \cdots + b_N,$$

que equivale à desigualdade que queríamos demonstrar.

Corolário. Dado um número natural $x \in C - \{4\}$, tem-se $S(x) < x$.

De fato, qualquer número composto pode ser escrito como um produto de N fatores primos distintos, elevados a expoentes naturais. Se tomarmos como $(a_1, \dots, a_n)$ os fatores primos diferentes de 2, $(m_1, \dots, m_n)$ as suas respectivas multiplicidades, e m_0 a multiplicidade do fator 2, x e $S(x)$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
x &= 2^{m_0} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n}\\
S(x) &= 2m_0 + a_1 m_1 + \cdots + a_n m_n
\end{aligned}$$

Se tivermos $m_0 \geq 1$ e $n \geq 1$, temos $S(x) < x$ pela Afirmação 2. Se tivermos $m_0 = 0$, $S(x) < x$ pelo Lema 2. Se tivermos $n = 0$, $S(x) < x$ pelo Lema 3 (pois $m_0 > 2$ na hipótese de que x é composto e diferente de 4).

É de imediata verificação que, para todo $y \in \mathbb{P} \cup \{4\}$, tem-se $S(x) = x$. ∎

Teorema 1. Todo número natural $x \in C - \{4\}$ tem a seguinte propriedade $P(x)$:

$$P(x) = x \in \mathbb{P} \text{ ou } P(S(x))$$

Demonstração. Seja $x_0 > 4$ (é imediato que a propriedade vale para $x_0 = 2$ e $x_0 = 3$). Como a soma de fatores primos de qualquer número é maior que 1, a seqüência $d(x_0) = (a_n)$ está bem definida para todo $n \in \mathbb{N}$, de maneira que $a_{n+1} = S(a_n)$.

Já provamos que, para todo x diferente de 4 e composto, $S(x) < x$. Supondo, por absurdo, que a seqüência (a_n) acima não contém nenhum número primo nem igual a 4, temos que $a_{n+1} = S(a_n) < a_n$ para todo $n > 0$ — ou seja, a seqüência é estritamente decrescente. Portanto, existe, para qualquer número natural k, algum i tal que $a_i < k$; em particular, existe i tal que $a_i < 2$. Isso é um absurdo, pois a_i é a soma dos fatores primos de um outro número natural; logo, a suposição de que (a_n) não contém números primos ou 4 é falsa, o que prova o teorema.