Sistemas de partículas e a mecânica de corpos rígidos

Eduardo S. Dobay

14 de outubro de 2010

1 Introdução

Consideremos um sistema de partículas, rotuladas por um certo índice α: cada partícula tem massa m_α e tem sua posição descrita pelo vetor $\mathbf{r}_\alpha$ em relação a uma certa origem O. É conveniente introduzir o *centro de massa* (CM) do sistema, que representa a "posição média" das partículas, ponderada por suas massas:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha, \tag{1}$$

em que $M = \sum_\alpha m_\alpha$ é a massa total do sistema. Com isso, podemos expressar a posição de cada partícula em relação ao centro de massa, $\mathbf{r}'_\alpha$, como

$$\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R} \tag{2}$$

Essas coordenadas são ilustradas na figura 1.

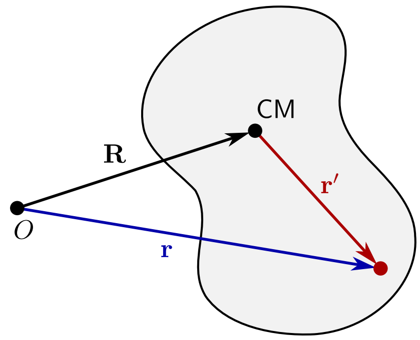

Figura 1: Coordenadas utilizadas na descrição de um sistema rígido de partículas.

2 Corpos rígidos

Se as distâncias relativas entre quaisquer duas partículas do sistema forem invariantes pela ação de forças externas, dizemos que o sistema é um *corpo rígido*. Nessas condições, o movimento do sistema sempre pode ser decomposto em duas partes independentes: uma rotação do corpo em torno de um certo eixo e uma translação do corpo como um todo.

2.1 Rotação

A rotação rígida de um corpo pode ser bastante complexa; mas a cada instante podemos sempre associar ao movimento um *eixo instantâneo de rotação*. A essa descrição nos é útil introduzir o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, que pode também ser definido para um "sistema" de uma única partícula. Esse vetor é caracterizado por:

- **módulo** igual à velocidade angular (instantânea) ao longo do eixo (instantâneo) de rotação;
- **direção** dada pelo eixo de rotação;
- **sentido** dado pela regra da mão direita, conforme a figura 2, na qual uma partícula faz uma rotação no sentido anti-horário se observada contra a direção de $\boldsymbol{\omega}$.

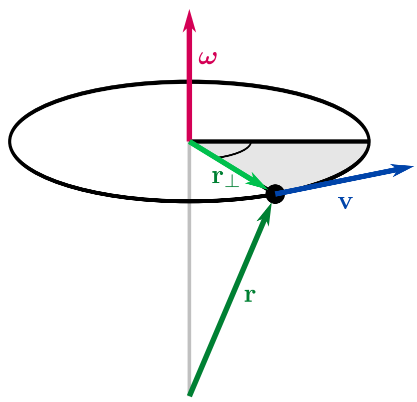

Figura 2: Representação do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ para um movimento de rotação num plano.

Na figura 2, o vetor $\mathbf{r}$ representa a posição da partícula *em relação a um ponto (fixo) no eixo de rotação*. Escreveremos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel$, em que $\mathbf{r}_\perp$ (a componente radial de $\mathbf{r}$) é perpendicular ao eixo de rotação e $\mathbf{r}_\parallel$ (a componente axial) é paralelo ao eixo. Dada a velocidade angular ω da partícula, o módulo de sua velocidade será $v = \omega r_\perp$, em que $r_\perp = |\mathbf{r}_\perp|$ é a sua distância ao eixo de rotação.

O vetor velocidade deve ser perpendicular ao eixo de rotação (já que ele é perpendicular ao movimento) e a $\mathbf{r}_\perp$ (para que $\mathbf{v}$ seja tangente à trajetória); além disso, $\mathbf{v}$ deve ser perpendicular a $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel$, pois $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}_\parallel$ pela primeira condição e $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}_\perp$ pela segunda condição. Assim, $\mathbf{v}$ tem a mesma direção de $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. O módulo de $\mathbf{v}$ é igual ao módulo de $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, pelo que foi observado acima. Usando a regra da mão direita, verificamos que essa é realmente a relação correta:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{3}$$

Note que não importa qual ponto do eixo escolhemos como origem, já que a componente $\mathbf{r}_\parallel$ não entra na nossa conta: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\parallel = 0$ e portanto $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\perp$.

Observe que a origem é um ponto fixo do movimento por estar sobre o eixo de rotação; no entanto, se o eixo de rotação não passar pela origem, devemos substituir o vetor posição $\mathbf{r}$ pelo vetor posição relativo ao eixo, $\mathbf{r} - \mathbf{a}$, em que $\mathbf{a}$ é o vetor posição de um ponto fixo do eixo. Assim, a forma mais geral do vetor velocidade devido à rotação com um ponto fixo na posição $\mathbf{a}$ é

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \tag{4}$$

A seguir, usaremos essa equação para descrever o movimento das partículas de um corpo rígido que gira em torno de um eixo e com ela calcular algumas propriedades dinâmicas dos corpos rígidos.

Energia cinética

A energia cinética do corpo é, por definição, a soma das energias cinéticas de todas as partículas constituintes:

$$T = \sum_\alpha T_\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \tag{5}$$

Se o corpo está girando com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em torno de um eixo, e as posições $\mathbf{r}_\alpha$ das partículas são medidas em relação a um ponto sobre esse eixo, temos $\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha$; portanto,

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \left[\omega^2 r_\alpha^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_\alpha)^2 \right]$$

O termo entre colchetes pode ser reescrito usando a notação de Einstein:

$$\begin{aligned} \omega^2 r_\alpha^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_\alpha)^2 &= \omega_i \omega_i r_\alpha^2 - (\omega_i r_{\alpha i})^2 \\ &= \omega_i \delta_{ij} \omega_j r_\alpha^2 - \omega_i r_{\alpha i} \omega_j r_{\alpha j} \end{aligned}$$

Assim, a energia cinética escreve-se como

$$T = \frac{1}{2} \omega_i \left[\sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} r_\alpha^2 - r_{\alpha i} r_{\alpha j} \right) \right] \omega_j \tag{6}$$

O termo central entre colchetes é denominado *tensor de inércia*, I_{ij}, com o qual a energia cinética adquire uma forma bastante simples:

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} r_\alpha^2 - r_{\alpha i} r_{\alpha j} \right) \tag{7}$$

$$T = \frac{1}{2} \omega_i I_{ij} \omega_j \tag{8}$$

Essa expressão para a energia cinética também pode ser escrita em forma matricial: $T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$. O tensor de inércia também pode ser expresso em notação matricial:

$$\mathbf{I} = \sum_\alpha m_\alpha \left(r_\alpha^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha^\top \right), \tag{9}$$

em que $\mathbf{1}$ é a matriz identidade (3×3).

Na maior parte dos casos de interesse em mecânica clássica, os sistemas de partículas são considerados como contínuos; nesse caso, a descrição do sistema como uma soma sobre todas as partículas não é adequada; devemos substituir a massa de cada partícula por um elemento de massa $dm = \rho(\mathbf{r})\, dV$ (sendo dV um elemento de volume e $\rho(\mathbf{r})$ a densidade de massa na posição $\mathbf{r}$), e a soma por uma integral. Por exemplo, o tensor de inércia seria expresso como

$$I_{ij} = \iiint \rho(\mathbf{r}) \left(\delta_{ij} r^2 - r_i r_j \right) d^3 r, \tag{10}$$

em que a integral é feita sobre todo o volume do corpo. Quando o corpo é considerado bi- ou unidimensional, a integral é transformada em uma integral dupla ou simples, e a densidade volumétrica é substituída por uma densidade superficial ou linear. Continuaremos empregando a notação de sistemas discretos, mas as alterações para sistemas contínuos devem ser óbvias daqui em diante.

Momento angular

O momento angular também é uma grandeza aditiva, ou seja,

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha \mathbf{L}_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha.$$

Assim, teremos, para uma rotação,

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha) = \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega})\, \mathbf{r}_\alpha \right]$$

Novamente, utilizaremos a notação de Einstein para reescrever a componente-i dessa expressão:

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_\alpha m_\alpha \left[\omega_i r_\alpha^2 - (r_{\alpha j} \omega_j)\, r_{\alpha i} \right] \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{ij} \omega_j r_\alpha^2 - r_{\alpha i} r_{\alpha j} \omega_j \right] = I_{ij} \omega_j \end{aligned}$$

ou, em notação matricial, $\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$.

Mudança de coordenadas

A expressão do tensor de inércia depende do sistema de coordenadas usado, que foi suposto ter a origem sobre um ponto O do eixo de rotação. Na verdade, essa expressão também pode ser utilizada para rotações em torno de qualquer eixo que passe pelo ponto O, ou seja, qualquer rotação que deixe o ponto O fixo. Se a rotação for em torno de um outro ponto $O' = O + \mathbf{a}$, vimos que devemos substituir $\mathbf{r}_\alpha$ por $\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a}$. Fazendo essa mudança na expressão do tensor de inércia (9), teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{I}' &= \sum_\alpha m_\alpha \left[(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a})^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a})(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{a})^\top \right] \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \Big[\left(r_\alpha^2 + a^2 - 2 \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{a} \right) \mathbf{1} - \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha^\top - \mathbf{a}\mathbf{a}^\top \\ &\qquad + \mathbf{r}_\alpha \mathbf{a}^\top + \mathbf{a} \mathbf{r}_\alpha^\top \Big] \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I} + M \left(a^2 \mathbf{1} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\top + \mathbf{R}\mathbf{a}^\top + \mathbf{a}\mathbf{R}^\top - 2 (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{1} \right), \tag{11}$$

em que $\mathbf{I}$ é o tensor de inércia original (em relação ao ponto O). Normalmente calculamos $\mathbf{I}$ no sistema de coordenadas do centro de massa ($O \equiv \mathrm{CM}$), de modo que $\mathbf{R} = 0$. A partir de $\mathbf{I} \equiv \mathbf{I}_{\mathrm{CM}}$ podemos calcular o tensor de inércia $\mathbf{I}'$ em relação a um ponto $O' = O + \mathbf{a}$ qualquer de maneira simples:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I}_{\mathrm{CM}} + M \left(a^2 \mathbf{1} - \mathbf{a}\mathbf{a}^\top \right) \tag{12}$$

Esse resultado é conhecido como *teorema dos eixos paralelos* ou *teorema de Steiner*.

2.2 Rotação e translação

Consideramos aqui que o corpo em questão está girando em torno de um eixo de rotação, sobre o qual há um ponto $A = O + \mathbf{a}$ que se desloca com uma velocidade $\mathbf{u}$. A velocidade de um ponto P do corpo na posição $\mathbf{r}$ (em relação a O) será, então,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \tag{13}$$

Note que a posição do eixo de rotação (mas não a sua direção) não é única; se considerarmos um outro ponto $B = O + \mathbf{b}$ arbitrário, podemos reescrever a velocidade acima como

$$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})}_{\mathbf{u}'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{b})$$

que corresponde a uma rotação, também com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, em torno do ponto B (ou, equivalentemente, em torno de um eixo que passa por ele, paralelo a $\boldsymbol{\omega}$ e portanto paralelo ao eixo original), que se desloca com uma velocidade $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Com isso, podemos considerar que o corpo gira em torno da origem O que se desloca com velocidade $\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$. Esse movimento da origem pode ser interpretado como uma translação (idêntica à do ponto A) somada à rotação de O em torno de A, de modo que a rotação de um ponto P em torno de A pode ser tomada como uma rotação em torno de O somada a uma rotação de O em torno de A.

Assim, podemos considerar que $\mathbf{a} = 0$ e calcular a energia cinética do corpo rígido usando para cada ponto a velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (em que $\mathbf{u}$ já contém a eventual mudança de eixo de rotação):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha \left[u^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha)^2 + 2\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha \right] \\ T &= \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + M \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \end{aligned} \tag{14}$$

Quando utilizamos o referencial do centro de massa (no qual $\mathbf{R} = 0$), obtemos um resultado bastante conhecido: a energia cinética se decompõe em duas componentes, uma puramente rotacional e uma puramente translacional:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M u_{\mathrm{CM}}^2}_{\text{translação}} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{I}_{\mathrm{CM}} \boldsymbol{\omega}}_{\text{rotação}} \tag{15}$$