Sobre produtos internos e escalares

Eduardo S. Dobay

25 de abril de 2011

No espaço $\mathbb{R}^2$ é bem conhecida a noção de **produto escalar** entre dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, definido como sendo

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos\theta, \tag{1}$$

em que $\|\cdot\|$ denota a norma (euclidiana) de um vetor, $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, e θ é o (menor) ângulo formado entre os dois vetores, $0 \leq \theta \leq \pi$.

O objetivo deste artigo é mostrar a relação desse conceito, formulado geometricamente, com a definição algébrica do produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Relembremos que o produto interno usual entre dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ é definido como

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2. \tag{2}$$

Relembremos também que uma operação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ em um espaço vetorial real V, para merecer o título de **produto interno**, deve satisfazer as seguintes propriedades para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

i) Linearidade (em relação à primeira variável): $\langle \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$;

ii) Simetria: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$;

iii) Positivo-definidade: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.[1]

Vamos analisar primeiramente o produto entre dois vetores unitários $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, isto é, tais que $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$. Neste caso podemos representar ambos os vetores no círculo unitário, descrevendo cada vetor $\mathbf{u}_j$ $(j = 1, 2)$ pelo ângulo α_j que forma com o eixo-x, como na figura 1.

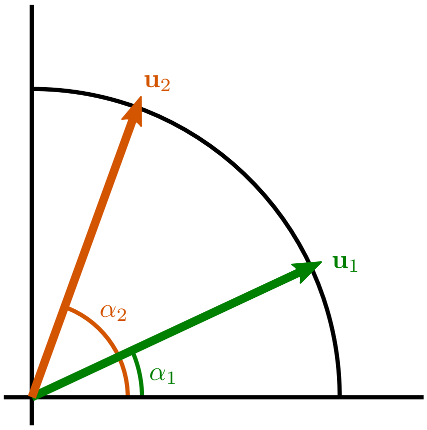

Figura 1: Representação dos vetores unitários $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Deve ser claro para o leitor que as coordenadas desses vetores são $\mathbf{u}_1 = (\cos\alpha_1, \operatorname{sen}\alpha_1)$ e $\mathbf{u}_2 = (\cos\alpha_2, \operatorname{sen}\alpha_2)$. Dessa maneira, podemos facilmente calcular $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$:

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 = \cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

[1] Note que não é necessário exigir que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pois isso já é garantido pela propriedade de linearidade.

lembrando das célebres identidades trigonométricas de soma e subtração de arcos. E $(\alpha_1 - \alpha_2)$ nada mais é que o ângulo entre os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Lembrando que os vetores são unitários, o produto escalar será

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \|\mathbf{u}_1\| \, \|\mathbf{u}_2\| \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$$

Verificamos, então, que o produto escalar e o produto interno são equivalentes para vetores unitários. Agora, pensemos em dois vetores quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, e vamos definir para cada um deles um vetor unitário na mesma direção e sentido:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \qquad \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

O produto interno pode ser escrito da seguinte maneira, lembrando-se de que ele é linear em cada uma das variáveis:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \|\mathbf{x}\| \, \hat{\mathbf{x}}, \|\mathbf{y}\| \, \hat{\mathbf{y}} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \, \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle$$

Como $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ são unitários, seu produto interno é igual a $\cos\theta$, sendo θ o ângulo entre eles — que coincide com o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Assim,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos\theta$$

que é, por definição, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Estabelecemos, assim, a equivalência do produto interno usual e do produto escalar em $\mathbb{R}^2$.