Sobre mudanças de base

Eduardo S. Dobay

17 de maio de 2009

As matrizes de mudança de base são motivo de frequente confusão entre estudantes de Álgebra Linear. Tentarei aqui esclarecer alguns pontos sobre esse assunto.

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e sejam $\mathscr{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ e $\mathscr{C} = \{\beta'_1, \ldots, \beta'_n\}$ bases de V. Assim, um vetor arbitrário $x \in V$ pode ser escrito como uma *combinação linear* dos vetores da base $\mathscr{B}$:

$$x = x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i \tag{1}$$

Dizemos que $x_1, \ldots, x_n$ são as *coordenadas de x em relação à base (ordenada) $\mathscr{B}$*. Mais adiante será útil também escrevê-las em forma matricial — denotaremos a matriz coluna formada pelas coordenadas por $[x]_{\mathscr{B}}$ ou X:

$$[x]_{\mathscr{B}} = X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

O vetor x também pode ser escrito em termos dos vetores de $\mathscr{C}$, com outro conjunto de coordenadas $x'_1, \ldots, x'_n$:

$$x = x'_1\beta'_1 + \cdots + x'_n\beta_n = \sum_{j=1}^{n} x'_j\beta'_j \tag{2}$$

A matriz coluna com essas coordenadas é, por analogia, denotada $[x]_{\mathscr{C}}$ ou X'.

Qual a relação entre os dois conjuntos de coordenadas $\{x_i\}$ e $\{x'_j\}$? Para descobrir isso, precisaremos das relações entre os vetores de $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$. Vamos escrever os vetores de $\mathscr{C}$ em termos dos vetores de $\mathscr{B}$:

$$\beta'_j = a_{1j}\beta_1 + a_{2j}\beta_2 + \cdots + a_{nj}\beta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i \tag{3}$$

Perceba que, da maneira como os coeficientes a_{ij} foram definidos, as colunas da matriz $M = [a_{ij}]$ corresponderão às coordenadas dos vetores de $\mathscr{C}$ em relação à base $\mathscr{B}$ — a j-ésima coluna contém os elementos $a_{1j}, \ldots, a_{nj}$, que são justamente as coordenadas de β'_j com respeito a $\mathscr{B}$ de acordo com a definição acima.

Assim, chamamos a matriz M, também denotada $M_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$, de *matriz mudança de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{C}$*. Reforcemos que, nessa matriz, *as colunas são as coordenadas da base "nova" ($\mathscr{C}$) em relação à base "antiga" ($\mathscr{B}$).*

Continuemos nosso problema original: encontrar a relação entre as coordenadas de x nas duas bases. Vamos substituir a expressão de β'_j na equação (2):

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} x'_j\beta'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x'_j a_{ij}\beta_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x'_j a_{ij}\beta_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j\right)\beta_i \end{aligned} \tag{4}$$

Por outro lado, x também pode ser escrito como

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i \tag{1}$$

Como as coordenadas de um vetor em relação a uma base são únicas, devemos ter, obrigatoriamente,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \tag{5}$$

Estabelecemos a procurada relação entre as coordenadas $\{x_i\}$ e $\{x'_j\}$. (Na verdade, encontramos a relação inversa: as coordenadas "antigas" em função das "novas".) Podemos escrevê-la em forma matricial:

$$X = MX' \tag{6}$$

Naturalmente, essa relação deve ser inversível; portanto, para escrever X' em função de X basta tomar a inversa de M (poderíamos refazer as contas para chegar a uma equação do tipo $X' = BX$, e seria fácil concluir que $B = M^{-1}$):

$$X' = M^{-1}X \tag{7}$$

Portanto, para transformar as coordenadas de um vetor para uma outra base, devemos multiplicar pela *inversa da matriz mudança de base.*

Matrizes de transformações

Consideremos agora uma transformação linear $T : V \to V$ e sejam $[T]_{\mathscr{B}}$ e $[T]_{\mathscr{C}}$ as matrizes de T em relação às bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$, respectivamente. Vamos determinar a relação entre essas matrizes.

As matrizes supracitadas devem ser tais que, se $x \in V$, então

$$\begin{aligned} [T]_{\mathscr{B}}[x]_{\mathscr{B}} &= [Tx]_{\mathscr{B}} \\ [T]_{\mathscr{C}}[x]_{\mathscr{C}} &= [Tx]_{\mathscr{C}} \end{aligned} \tag{8}$$

Escrevendo $[Tx]_{\mathscr{B}} = Y$ e $[Tx]_{\mathscr{C}} = Y'$ e lembrando que $X = MX'$ e $Y = MY'$, teremos

$$\begin{aligned} [T]_{\mathscr{B}}MX' &= MY' \\ [T]_{\mathscr{C}}X' &= Y' \end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo a segunda igualdade no lado direito da primeira, temos

$$[T]_{\mathscr{B}}MX' = M[T]_{\mathscr{C}}X'$$

Como essa igualdade deve valer para qualquer vetor x, então devemos ter $[T]_{\mathscr{B}}M = M[T]_{\mathscr{C}}$, ou

$$[T]_{\mathscr{C}} = M^{-1}[T]_{\mathscr{B}}M \tag{10}$$

Em outras palavras, para mudar de base a matriz de uma transformação linear, multiplicamos *à direita pela matriz mudança de base, e à esquerda por sua inversa.*

Há uma maneira mais intuitiva de pensar nisso. A matriz $[T]_{\mathscr{C}}$ deve ser tal que

$$[T]_{\mathscr{C}}[x]_{\mathscr{C}} = [Tx]_{\mathscr{C}}.$$

Agora suponha que temos as coordenadas de x em $\mathscr{C}$ e queremos encontrar as coordenadas de Tx também em $\mathscr{C}$. Se soubermos a matriz $[T]_{\mathscr{B}}$, podemos fazer o seguinte procedimento:

$[x]_{\mathscr{C}}$	coordenadas de x em relação a $\mathscr{C}$
$M[x]_{\mathscr{C}}$	passamos para a base $\mathscr{B}$ (estas são as coordenadas $[x]_{\mathscr{B}}$)
$[T]_{\mathscr{B}}M[x]_{\mathscr{C}}$	de posse das coordenadas de x na base $\mathscr{B}$, conseguimos achar as coordenadas de Tx na base $\mathscr{B}$
$M^{-1}[T]_{\mathscr{B}}M[x]_{\mathscr{C}}$	se temos Tx na base $\mathscr{B}$, basta multiplicar M^{-1} para obter o mesmo vetor na base $\mathscr{C}$

Daí, concluímos que $M^{-1}[T]_{\mathscr{B}}M$ é a matriz $[T]_{\mathscr{C}}$ desejada.

Outra forma de ver a matriz mudança de base

Pensemos agora na matriz de uma transformação linear T em relação às bases $\mathscr{C}$ e $\mathscr{B}$. Se $Tx = y$, então

$$[T]_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\ [x]_{\mathscr{C}} = [y]_{\mathscr{B}} \tag{11}$$

Uma mudança de base não altera nenhum vetor; ela apenas dá as coordenadas de um vetor em outra base. Podemos, então, pensar na matriz mudança de base como a matriz da transformação identidade I em relação às bases $\mathscr{C}$ e $\mathscr{B}$. Basta reescrever a equação anterior no caso em que $T = I$ e portanto $Tx = x$:

$$[I]_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\ [x]_{\mathscr{C}} = [x]_{\mathscr{B}} \qquad \text{ou } X = [I]_{\mathscr{C},\mathscr{B}} X'$$

Portanto, comparando com (6), concluímos que

$$M_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = [I]_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$$

Ou seja, a matriz mudança de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{C}$ é igual à matriz da transformação identidade em relação ao par de bases $(\mathscr{C}, \mathscr{B})$.

Resumo

Dadas duas bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ de um espaço vetorial V de dimensão finita, a *matriz mudança de base de $\mathscr{B}$ para $\mathscr{C}$* é a matriz $M_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ cujas colunas são as coordenadas dos vetores de $\mathscr{C}$ em relação à base $\mathscr{B}$.

Se $x \in V$, suas coordenadas nas bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ são relacionadas por

$$[x]_{\mathscr{C}} = M^{-1}[x]_{\mathscr{B}},$$

onde $M = M_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ é a matriz mudança de base mencionada acima.

Se T é um operador linear sobre V, sua matriz com respeito à base $\mathscr{B}$ e sua matriz com respeito a $\mathscr{C}$ têm a seguinte relação:

$$[T]_{\mathscr{C}} = M^{-1}[T]_{\mathscr{B}} M$$

Referências

[1] K. Hoffman, R. Kunze (1971), *Linear Algebra* (2nd ed.), Englewood Cliffs: Prentice Hall