Transformada de Fourier da função gaussiana

Eduardo S. Dobay

1 de julho de 2009

Seja a função gaussiana $h(x) = e^{-\beta(x-\gamma)^2}$, em que $\beta > 0$ e $\gamma \in \mathbb{C}$. Vamos primeiramente calcular a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x-\gamma)^2}\, dx =: I.$$

Tomaremos como já conhecido o fato de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

Escreveremos $\gamma = a + bi$ (com a e b reais, naturalmente), e assim podemos fazer a mudança de variável $y = x - a$. Os limites de integração continuam os mesmos (já que são infinitos), e temos $x - \gamma = y - bi$; portanto,

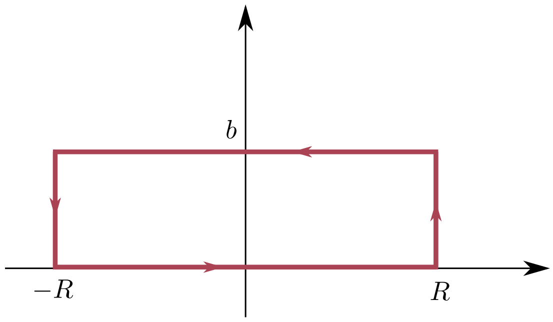

Figura 1: Circuito utilizado para a integração.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(y-bi)^2}\, dy$$

Agora consideraremos um circuito no plano complexo, conforme ilustrado na figura. A integral que desejamos calcular corresponde à integral no segmento inferior do circuito, no limite $R \to \infty$. Definindo a função $f(z) = e^{-\beta(z-bi)^2}$, vemos que ela é analítica em todo o plano complexo e, portanto, sua integral ao longo do circuito fechado é zero.

A integral ao longo do circuito fechado pode ser escrita como a soma das integrais em cada um dos segmentos de reta. No segmento inferior, como já dissemos, a integral é

$$I_1(R) = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = \int_{-R}^{R} e^{-\beta(x-bi)^2}\, dx.$$

No segmento superior, o número $z - bi$ é real (pois $z = x + bi$), e portanto a integral recairá no caso já conhecido (lembrando que o sentido de integração é invertido):

$$I_3(R) = -\int_{-R}^{R} f(x+bi)\, dx = -\int_{-R}^{R} e^{-\beta x^2}\, dx$$

Vamos agora analisar as integrais nos segmentos verticais. Podemos escrever sua soma como

$$\begin{aligned} J(R) = \int_0^b f(R+iy)\, i\, dy - \int_0^b f(-R+iy)\, i\, dy &= i \int_0^b \left[e^{-\beta[R+(y-b)i]^2} - e^{-\beta[R-(y-b)i]^2} \right] dy \\ &= i \int_0^b e^{-\beta\left[R^2-(y-b)^2\right]} \left[e^{-2\beta R(y-b)i} - e^{2\beta R(y-b)i} \right] dy \\ &= 2 \int_0^b e^{-\beta\left[R^2-(y-b)^2\right]} \operatorname{sen}\Big(2\beta R(y-b)\Big)\, dy \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que essa integral vai a zero quando $R \to \infty$. Temos

$$|J(R)| \le 2 \int_0^b \left| e^{-\beta\left[R^2-(y-b)^2\right]} \right| \left| \operatorname{sen}\Big(2\beta R(y-b)\Big) \right| dy \le 2 \int_0^b e^{-\beta\left[R^2-(y-b)^2\right]}\, dy$$

É mais cômodo trabalhar com a variável $t = b - y$; fazendo a mudança, teremos

$$|J(R)| \le 2 \int_0^b e^{-\beta\left(R^2-t^2\right)}\, dt$$

Lembremos que o expoente tem seu valor máximo quando $R^2 - t^2$ é mínimo; na integral, isso ocorre quando $t = b$ (considerando R suficientemente grande); assim, encontramos uma majoração para o integrando:

$$|J(R)| \leq 2 \int_0^b e^{-\beta\left(R^2 - b^2\right)}\, dt = 2be^{-\beta\left(R^2 - b^2\right)} = 2be^{\beta b^2} e^{-\beta R^2}$$

Agora, devido ao último termo, podemos afirmar que $|J(R)| \to 0$ quando $R \to \infty$ (e, portanto, $J(R) \to 0$). Voltando ao nosso circuito, temos

$$\oint f(z)\, dz = I_1(R) + I_3(R) + J(R)$$

Lembrando que o lado esquerdo é sempre igual a zero e tomando o limite $R \to \infty$, teremos

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x - bi)^2}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\, dx$$

e, portanto,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x-\gamma)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

Com isso, a tarefa de determinar a transformada de Fourier $\mathcal{F}[h]$ da função gaussiana fica bastante simplificada. Tal função é definida por

$$\mathcal{F}[h](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-i\xi x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x-\gamma)^2} e^{-i\xi x}\, dx$$

O integrando pode ser reescrito como

$$\exp\Big[-\beta x^2 + (2\gamma\beta - i\xi)\, x - \gamma^2 \beta\Big] = \exp\left\{-\beta \left[x - \left(\gamma - \frac{i\xi}{2\beta}\right)\right]^2 - \frac{\xi^2}{4\beta} - i\gamma\xi\right\},$$

e assim a transformada de Fourier será

$$\mathcal{F}[h](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\beta} - i\gamma\xi\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\beta \left[x - \left(\gamma - \frac{i\xi}{2\beta}\right)\right]^2\right\} dx$$

Mas já vimos que essa integral vale $\sqrt{\pi/\beta}$, então temos

$$\mathcal{F}[h](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4\beta} - i\gamma\xi\right\} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \exp\left\{-\frac{1}{4\beta}\,(\xi + 2i\gamma\beta)^2 - \gamma^2\beta\right\}$$

Assim,

$$\mathcal{F}[h](\xi) = \frac{e^{-\gamma^2\beta}}{\sqrt{2\beta}} \exp\left[-\frac{1}{4\beta}\,(\xi + 2i\gamma\beta)^2\right]$$