Equações diferenciais lineares

Eduardo S. Dobay

27 de julho de 2010

Sumário

1 Equações de primeira ordem

Uma *equação diferencial ordinária de primeira ordem* é uma relação do tipo

$$F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0, \tag{1.1}$$

da qual se busca determinar a função $y : I \to \mathbb{C}$, diferenciável, definida num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A equação diz-se *ordinária* pois a função procurada é uma função de uma variável apenas, e de *primeira ordem* pois não aparecem na equação derivadas de y de ordem superior à primeira.

Vamos trabalhar com um tipo bastante especial de equação diferencial: as equações diferenciais *lineares*, ou seja, aquelas em que só aparecem termos com y e y' elevadas à primeira potência, sem produtos entre elas. Equações desse tipo podem ser escritas na forma

$$y'(t) - p(t)y(t) = f(t), \tag{1.2}$$

sendo $p(t)$ e $f(t)$ funções conhecidas, definidas no intervalo I. Exigimos de p e f, a princípio, apenas que sejam integráveis.

1.1 Equações homogêneas

Vamos primeiro estudar o caso em que $f(t) = 0$, ou seja, a equação diferencial reduz-se a

$$y'(t) - p(t)y(t) = 0. \tag{1.3}$$

Nesse caso, quando a equação diferencial não envolve termos que não contenham y ou sua derivada, dizemos que a equação é **homogênea**. Esse caso é de particular importância pois, nessas condições, combinações lineares de soluções da equação são também soluções: se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ satisfazem a equação e c_1 e c_2 são constantes, então $y(t) = c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ também satisfaz a equação, devido à linearidade da derivada. Esse fato também é conhecido como **princípio de superposição**.

Denotemos por D o operador que associa a uma função (diferenciável) a sua derivada: $(Df)(x) = f'(x)$.[1] Se definirmos o operador diferencial $L = D - p(t)$, agindo sobre um espaço V de funções $y(t)$, diferenciáveis no intervalo I, da seguinte maneira:

$$(Ly)(t) = y'(t) - p(t)y(t)$$

a equação diferencial equivale à simples expressão $Ly = 0$. Observe que o operador L é linear e que o conjunto de soluções da equação nada mais é que o *núcleo* desse operador. Isso, por si só, diz que o conjunto de soluções constitui um espaço vetorial (mais especificamente, um subespaço de V) e que, portanto, toda combinação linear de soluções é também solução.

Para buscar soluções da equação, vamos definir $P(t) = \int p(t)\,dt$ como uma primitiva da função p. Observe que, dessa forma, a função $g(t) = e^{-P(t)}$ tem como derivada $g'(t) = -P'(t)e^{-P(t)} = -p(t)g(t)$. Multiplicando (1.3) por $g(t)$ (o que é possível pois g é uma função exponencial e, portanto, não se anula), teremos

$$\begin{aligned} y'(t)g(t) - y(t)p(t)g(t) &= 0 \\ y'(t)g(t) + y(t)g'(t) &= 0 \\ (y(t)g(t))' &= 0 \end{aligned}$$

A função $g(t)$ é chamada de *fator integrante*, pois permite que transformemos a equação numa derivada perfeita e assim possamos simplesmente integrá-la. Daqui concluímos que $y(t)g(t)$ deve ser igual a uma constante C, e portanto $y(t) = C/g(t)$, ou seja,

$$y(t) = Ce^{P(t)} \tag{1.4}$$

Note que há duas indeterminações nessa expressão: a constante C e a primitiva $P(t)$ de p. Lembre-se de que uma função tem infinitas primitivas — se $P(t)$ é uma primitiva, então $\tilde{P}(t) = P(t) + k$, também é, qualquer que seja a constante k. Observe, no entanto, que a constante k pode ser absorvida à constante C:

$$Ce^{P(t)} = Ce^{\tilde{P}(t)-k} = Ce^{\tilde{P}(t)}e^{-k} = (Ce^{-k})e^{\tilde{P}(t)} = \tilde{C}e^{\tilde{P}(t)}$$

Então, na verdade, essas duas indeterminações são uma só. Podemos, por exemplo, escolher a primitiva que se anula em um certo instante $t_0 \in I$, de modo que $y(t_0) = Ce^{P(t_0)} = C$. Essa escolha é conveniente se desejarmos resolver a equação com uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$, que dessa forma se traduz na solução

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(t')\,dt'\right). \tag{1.5}$$

Note que, independentemente da primitiva escolhida, todas as soluções da equação diferencial são múltiplas umas das outras, ou seja, o espaço de soluções tem dimensão 1. Assim, uma solução qualquer pode ser escrita como um múltiplo $y(t) = c_1y_1(t)$ da função $y_1(t) = \exp\left(\int p(t)\,dt\right)$. Isso equivale a dizer que y_1 constitui, sozinha, uma base do espaço de soluções.

[1] Para ser mais preciso: o operador D associa a uma função f uma função Df que coincide com a derivada f' de f. A notação $(Df)(x)$ indica que estamos tomando a função Df que resulta da aplicação de D à função f e calculando-a no ponto x.

Repare também que, quando $p(t)$ é constante, $p(t) = \lambda$, a primitiva de $p(t)$ que se anula em t_0 é simplesmente $P(t) = \lambda(t - t_0)$. Portanto, as soluções de $y' - \lambda y = 0$ podem ser escritas como $y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$, ou seja, são sempre múltiplas de $y_1(t) = e^{\lambda t}$.

1.2 Equações inomogêneas

Uma maneira simples de resolver a equação $Ly = f$, para $f \neq 0$, é totalmente análoga ao que foi feito para o caso homogêneo: multiplicamos a equação (1.2),

$$y'(t) - p(t)y(t) = f(t),$$

pelo fator integrante $g(t) = e^{-P(t)}$, sendo $P(t)$ uma primitiva de $p(t)$, e chegamos à equação

$$\left(y(t)e^{-P(t)}\right)' = e^{-P(t)} f(t)$$

Integrando os dois lados da equação, obtemos

$$y(t)e^{-P(t)} = \int_{t_0}^{t} e^{-P(s)} f(s)\, ds + C,$$

e a solução pode ser escrita como

$$y(t) = Ce^{P(t)} + e^{P(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-P(s)} f(s)\, ds \tag{1.6}$$

Note que o primeiro termo da solução (vamos denominá-lo $y_h(t)$) corresponde à solução geral da equação homogênea $Ly = 0$. Portanto, se considerarmos o segundo termo, $y_i(t) = y(t) - y_h(t)$, teremos $Ly_i = L(y - y_h) = Ly - Ly_h = f - 0 = f$, ou seja, o segundo termo sozinho também é solução da equação inomogênea. Em outras palavras, somando uma solução qualquer da equação homogênea a uma solução da equação inomogênea, caímos novamente numa solução da equação inomogênea. Mais adiante, quando olharmos para as equações de 2ª ordem, veremos com mais detalhes a importância desse fato.

Observe também que o fator $e^{P(t)}$ pode entrar na integral do segundo termo em (1.6), e portanto ficamos com um fator $e^{P(t)-P(s)}$ dentro da integral. Esse fator não depende da particular primitiva de p que escolhemos, já que a diferença $P(t) - P(s)$ nada mais é que a integral definida de $p(t)$ de s a t, de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo. Assim, o termo $y_i(t)$ independe da primitiva escolhida; ele só depende do extremo que adotamos na integral que é explicitada em (1.6).

Vale lembrar também, como no caso das equações homogêneas, que, caso $p(t)$ seja constante ($p(t) = \lambda$), a primitiva de $p(t)$ que se anula em t_0 é simplesmente $P(t) = \lambda(t - t_0)$, e a solução da equação inomogênea pode ser escrita como

$$y(t) = Ce^{\lambda t} + e^{\lambda t} \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda s} f(s)\, ds \tag{1.7}$$

2 Equações de segunda ordem

Consideremos um operador $L = D^2 + p(t)D + q(t)$ definido num certo espaço V de funções $u : I \to \mathbb{C}$ duas vezes diferenciáveis, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. $p(t)$ e $q(t)$

são funções (conhecidas) definidas nesse mesmo intervalo, e das quais não precisamos exigir muita coisa.

Consideraremos primeiramente *equações diferenciais lineares homogêneas de 2ª ordem*, do tipo $Ly = 0$, para uma função $y = y(t)$, que podem ser escritas mais explicitamente na forma

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = 0. \tag{2.1}$$

Uma solução dessa equação é uma função $y(t)$, definida no intervalo I, que satisfaça essa igualdade. Observe que o operador L, da mesma maneira que o operador L definido para equações de primeira ordem, é linear e, portanto, as soluções da equação constituem um subespaço vetorial de V, ou seja, continua valendo o princípio de superposição.

É um fato bem conhecido (e cuja demonstração não vem ao caso) que esse espaço tem dimensão 2. Isso significa que uma solução qualquer da equação $Ly = 0$ pode ser escrita em termos de duas funções linearmente independentes y_1 e y_2: $y(t) = c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$. Essa é dita a **solução geral** da equação. Veja que ela não determina uma única função, mas sim uma família de funções, com dois parâmetros "livres" c_1 e c_2.

Frequentemente estamos interessados não na solução geral, mas em uma solução específica, que não dependa desses parâmetros, como é o caso das equações de movimento da mecânica clássica. Imagine um caso simples: uma bola é lançada verticalmente no instante t_0 e queremos determinar sua trajetória subsequente, ou seja, uma função do tempo, $y(t)$, que representa a posição da bola em cada instante. A trajetória é caracterizada por três fatores: a equação de movimento da bola (que traduz as forças que estão sendo aplicadas), e sua posição $y(t_0)$ e velocidade $\dot{y}(t_0)$ iniciais — essas duas são as **condições iniciais** do problema.

Apenas a equação de movimento (no caso da bola que cai sob a aceleração da gravidade, g, a equação de movimento seria $\ddot{y}(t) = g$) não é suficiente para caracterizar completamente o movimento da bola. Todas as bolas lançadas verticalmente de qualquer altura, com qualquer velocidade inicial, têm essa mesma equação de movimento; a solução geral da equação de movimento contém todas as trajetórias possíveis para qualquer condição inicial. Para obter a trajetória da nossa bola específica, precisamos impor as condições iniciais sobre a solução geral.

Em geral, as condições iniciais são vínculos sobre a função e/ou suas derivadas em um ponto t_0, e o fato de usarmos a palavra *inicial* sugere fortemente que a região de interesse para a solução seja o conjunto dos instantes $t > t_0$. Isso não nos impede de encontrar a solução para $t < t_0$: poderíamos, no exemplo anterior do lançamento da bola, ter dado o instante em que a bola cai no chão (adotando o chão como $y = 0$) e a velocidade com que isso ocorre, e a partir daí encontrar o movimento anterior da bola.

Outro tipo de vínculo que se pode usar são as chamadas **condições de contorno** ou de **fronteira**, que se referem a vínculos em dois pontos — em boa parte dos casos, estamos interessados na solução num intervalo $[a, b]$ e desejamos fixar a solução nos pontos a e b, que são a *fronteira* do intervalo. Por exemplo, poderíamos especificar a altura da qual a bola parte no instante t_0 e a velocidade com que ela cai no chão no instante t_1, ainda na mesma situação do exemplo anterior, e a partir desses dados também é possível determinar a trajetória da bola entre o lançamento e a colisão com o chão.

Em qualquer um desses casos, para determinar *uma* solução do problema, precisamos de duas condições sobre a função e sua primeira derivada para definir os dois parâmetros c_1 e c_2. Vimos que uma maneira de fazer isso é fornecer o valor da função e de sua primeira derivada num certo ponto t_0, ou seja, as *condições iniciais*:

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ \dot{y}(t_0) &= v_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Veja que isso realmente nos dá uma solução única para o problema. Impondo essas duas condições sobre a solução geral $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, temos

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y_0 \\ c_1 \dot{y}_1(t_0) + c_2 \dot{y}_2(t_0) &= v_0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ \dot{y}_1(t_0) & \dot{y}_2(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Como y_1 e y_2 são linearmente independentes, as colunas da matriz do lado esquerdo são linearmente independentes, o que significa que a matriz pode ser invertida, dando uma solução única para c_1 e c_2.

O determinante dessa matriz é chamado **wronskiano** do conjunto das duas funções $\{y_1, y_2\}$ no ponto t_0, e denotado $W(t_0) = y_1(t_0)\dot{y}_2(t_0) - \dot{y}_1(t_0)y_2(t_0)$. A matriz em si é denominada matriz wronskiana, e denotada $\mathbb{W}(t_0)$. Assim, invertendo a matriz, podemos escrever explicitamente quem são c_1 e c_2:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{W(t_0)} \begin{bmatrix} \dot{y}_2(t_0) & -y_2(t_0) \\ -\dot{y}_1(t_0) & y_1(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

2.1 Mais sobre equações homogêneas

Vamos agora construir uma propriedade bastante interessante do wronskiano. Para isso, vamos calcular sua derivada $W'(t)$:

$$W(t) = y_1(t)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)y_2(t) \tag{2.6}$$

$$W'(t) = y_1(t)\ddot{y}_2(t) - \ddot{y}_1(t)y_2(t) + \dot{y}_1(t)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)\dot{y}_2(t)$$

$$W'(t) = y_1(t)\ddot{y}_2(t) - \ddot{y}_1(t)y_2(t) \tag{2.7}$$

Substituindo as segundas derivadas de acordo com a equação diferencial satisfeita por y_1 e y_2, teremos

$$\begin{aligned} W'(t) &= y_2(t)[p(t)\dot{y}_1(t) + q(t)y_1(t)] - y_1(t)[p(t)\dot{y}_2(t) + q(t)y_2(t)] \\ &= p(t)\left[\dot{y}_1(t)y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(t)\right] \end{aligned}$$

Identificando o termo entre colchetes como $-W(t)$, temos que W satisfaz a equação diferencial

$$W'(t) = -p(t)W(t), \tag{2.8}$$

cuja solução será

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(t')\,dt'\right). \tag{2.9}$$

Essa expressão nos permite determinar o wronskiano diretamente a partir da equação diferencial, sem conhecer suas soluções. Uma das utilidades disso é encontrar uma segunda solução da equação diferencial quando já conhecemos uma das soluções: se $W(t)$ e $y_1(t)$ são conhecidos, (2.6) é uma equação diferencial linear de 1ª ordem para $y_2(t)$, que pode ser resolvida diretamente.

■ 2.2 Equações inomogêneas

Estudaremos agora as soluções da equação $Ly = f$, na qual L é o mesmo operador diferencial $L = D^2 + p(t)D + q(t)$ e $f(t)$ é outra função já conhecida. Nesse caso dizemos que a equação é *inomogênea* pois o lado direito da equação não é mais zero. Equações inomogêneas aparecem, por exemplo, quando um oscilador harmônico é forçado por uma força externa dependende do tempo, como um motor que faz a mola oscilar numa certa frequência. Ou, num caso mais simples, quando o oscilador está na vertical e portanto sob a ação da força constante da gravidade que aponta para baixo, na mesma direção do movimento da mola.

Certamente deve continuar havendo uma família de soluções $y(t)$ para o problema $Ly = f$, pois, se pensarmos em um sistema físico, a trajetória deve depender de algum modo da condição inicial. No entanto, a função f atrapalha um pouco as coisas: perdemos o princípio de superposição; as soluções não formam mais um espaço vetorial. O que vale é um "princípio de superposição" um pouco diferente: se temos duas funções y_a e y_b tais que $Ly_a = f_a$ e $Ly_b = f_b$ (note que as funções do lado direito são diferentes!), então $y = y_a + y_b$ é solução de $Ly = f_a + f_b$. Esta propriedade é útil para encontrarmos soluções "por partes": se a função f do lado direito da equação é uma soma $f = \sum f_k$ e sabemos achar cada uma das soluções de $Ly_k = f_k$, podemos tomar como solução a soma $y = \sum y_k$.

Devemos olhar agora para outra coisa: a *diferença* entre duas soluções. Sejam y_a e y_b duas soluções quaisquer da equação $Ly = f$. Como o operador L é linear, temos

$$L(y_a - y_b) = Ly_a - Ly_b = f - f = 0$$

e portanto as duas soluções diferem por uma função que é solução do problema homogêneo associado. Ou seja, se conhecemos todos os elementos do espaço solução do problema homogêneo e uma solução particular (mas qualquer) do problema inomogêneo, podemos fabricar todas as soluções do problema inomogêneo.

Em suma, se conhecermos uma solução particular y_p de $Ly = f$ e a base $\{y_1, y_2\}$ do espaço solução de $Ly = 0$, a solução geral de $Ly = f$ será dada por

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{2.10}$$

Agora nosso problema fica reduzido a achar *uma* solução qualquer de $Ly = f$. Em alguns casos, dependendo das funções p e q e da forma de f, pode haver algumas técnicas simples para isso: em alguns casos é possível "chutar" um tipo de solução com coeficientes indeterminados e encontrar os coeficientes apropriados substituindo o chute na equação (isso é conhecido às vezes como *método dos coeficientes indeterminados*); em casos bem especiais, podemos fazer uma mudança de variável de modo a deixar a equação homogênea novamente.

Embora muitos dos casos que aparecem na prática possam ser resolvidos por técnicas bastante simples, há um método bem geral para achar uma solução particular. É o **método da variação dos parâmetros** (ou *método da variação das* *constantes*), que consiste em supor que a solução particular possa ser escrita na forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t), \tag{2.11}$$

ou seja, como se fosse uma solução da equação homogênea, com as constantes c_1 e c_2 trocadas por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$. Essa condição não é muito restritiva, já que as funções u_1 e u_2 são, a princípio arbitrárias. Vamos substituir y_p na equação diferencial $Ly_p = f$, ou, explicitamente,

$$\ddot{y}_p(t) + p(t)\dot{y}_p(t) + q(t)y_p(t) = f(t), \tag{2.12}$$

para descobrir que condições essas funções u_1 e u_2 devem satisfazer. Calculemos primeiro as derivadas de y_p:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \tag{2.13}$$

$$\dot{y}_p = u_1\dot{y}_1 + u_2\dot{y}_2 + \dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2 \tag{2.14}$$

$$\ddot{y}_p = u_1\ddot{y}_1 + u_2\ddot{y}_2 + \dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 + (\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2)' \tag{2.15}$$

Reagrupando alguns termos para calcular $Ly_p = \ddot{y}_p + p\dot{y}_p + qy_p$, obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{y}_p + p\dot{y}_p + qy_p = u_1 &\underbrace{(\ddot{y}_1 + p\dot{y}_1 + qy_1)}_{=0} + u_2 \underbrace{(\ddot{y}_2 + p\dot{y}_2 + qy_2)}_{=0} + \\ &+ p(\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2) + (\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2)' + \\ &+ \dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Os dois termos destacados se anulam pois y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea. Em virtude da equação diferencial, o lado direito deve ser igual a f:

$$p(\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2) + (\dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2)' + \dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 = f \tag{2.17}$$

Note que temos duas incógnitas u_1 e u_2, mas nosso único vínculo, a equação diferencial, só nos dá uma equação nessas incógnitas. Para determinar u_1 e u_2 unicamente, precisamos de um outro vínculo. Veja que (2.17) nos tenta a fazer uma escolha muito conveniente: anular o termo entre parênteses que aparece duas vezes na equação. Essa é uma escolha arbitrária que, analogamente a uma escolha de calibre para os potenciais eletromagnéticos, não altera a realidade da nossa solução, e portanto é uma escolha lícita. Adotando essa condição, temos então duas equações diferenciais para u_1 e u_2, sendo a primeira devida à nossa "escolha de calibre" e a segunda devida a (2.17):

$$y_1(t)\dot{u}_1(t) + y_2(t)\dot{u}_2(t) = 0 \tag{2.18}$$

$$\dot{y}_1(t)\dot{u}_1(t) + \dot{y}_2(t)\dot{u}_2(t) = f(t) \tag{2.19}$$

ou, então, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Ao lado esquerdo temos a matriz wronskiana $\mathbb{W}(t)$ que, como já vimos anteriormente, é invertível e tem seu determinante denotado por $W(t)$. Assim, teremos

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{W(t)} \begin{bmatrix} \dot{y}_2(t) & -y_2(t) \\ -\dot{y}_1(t) & y_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} = \frac{f(t)}{W(t)} \begin{bmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Para encontrar $u_1(t)$ e $u_2(t)$ explicitamente, basta integrar o lado direito da equação. Note que a adição de uma constante arbitrária de integração a qualquer das $u_j(t)$ resulta na adição a $y_p(t)$ de um múltiplo das soluções da equação homogênea, e portanto não nos dá nenhuma informação nova. Escolhendo a constante de integração tal que a solução particular se anule no instante inicial, teremos

$$u_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)}{W(s)} f(s)\, ds \qquad u_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)}{W(s)} f(s)\, ds \tag{2.22}$$

E, portanto, teremos como solução particular

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{W(s)} \Big[y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s) \Big] f(s)\, ds \tag{2.23}$$

Definimos como $G(t,s)$ e denominamos **função de Green** o termo do integrando que multiplica f, ou seja,

$$G(t,s) = \frac{1}{W(s)} \Big[y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s) \Big], \tag{2.24}$$

de modo que a solução particular adquire a forma

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s) f(s)\, ds \tag{2.25}$$

Note que essa solução particular, além de se anular no instante inicial, tem derivada nula no instante inicial: levando em conta a condição de calibre, a expressão de $\dot{y}_p$ em (2.14) torna-se

$$\dot{y}_p(t) = u_1(t)\dot{y}_1(t) + u_2(t)\dot{y}_2(t), \tag{2.26}$$

que se anula em $t = t_0$ por conta das integrais, em (2.22), que definem u_1 e u_2.

À luz da expressão em (2.25) para $y_p(t)$, fica mais claro o papel da função de Green: ela indica o quanto a presença da função f no instante s afeta a solução no instante t. Note, porém, que, se estivermos resolvendo o problema para $t < t_0$, essa interpretação gera um problema de causalidade: a solução no instante t é afetada pela função f nos instantes $s > t$, ou seja, ela "recebe informação do futuro"!

Com isso, podemos achar a solução do problema completo

$$Ly = f \qquad y(t_0) = y_0 \qquad \dot{y}(t_0) = v_0$$

simplesmente aplicando as condições iniciais à solução geral do problema homogêneo ($y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$) e somando-lhe a solução particular $y_p(t)$. Utilizando a expressão dos c_i de (2.5), teremos

$$y_h(t) = y_0 \left[\frac{y_1(t)\dot{y}_2(t_0) - \dot{y}_1(t_0)y_2(t)}{W(t_0)} \right] + v_0 \left[\frac{y_1(t_0)y_2(t) - y_1(t)y_2(t_0)}{W(t_0)} \right] \tag{2.27}$$

Observe que nessa equação também podemos enxergar a presença da função de Green. O segundo termo entre colchetes é exatamente a função de Green $G(t, t_0)$. O primeiro termo está relacionado à derivada da função de Green: veja que

$$\frac{\partial G}{\partial s}(t,s) = -\frac{W'(s)}{W(s)} G(t,s) + \frac{1}{W(s)} \Big[\dot{y}_1(s)y_2(t) - y_1(t)\dot{y}_2(s) \Big] \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \frac{1}{W(s)} \Big[y_1(s)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)y_2(s) \Big] \tag{2.29}$$

e, portanto, podemos escrever $y_h(t)$ de duas maneiras diferentes:

$$y_h(t) = -y_0 \left[\frac{\partial G}{\partial s}(t, t_0) + \frac{W'(t_0)}{W(t_0)} G(t, t_0) \right] + v_0 G(t, t_0) \tag{2.30}$$

$$y_h(t) = \frac{W(t)}{W(t_0)} \left[y_0 \frac{\partial G}{\partial t}(t_0, t) + v_0 G(t_0, t) \right] \tag{2.31}$$

Adotando a interpretação causal da função de Green, vemos que a primeira expressão parece se referir a instantes posteriores a t_0, e a segunda a instantes anteriores a t_0.

Cálculo da função de Green: oscilador harmônico

Calcularemos a função de Green para a equação diferencial do oscilador harmônico, que é uma equação diferencial linear de 2ª ordem, do tipo

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \tag{2.32}$$

Há três casos de interesse a analisar, de acordo com as raízes do polinômio característico dessa equação:

1. Quando $\omega_0 > \gamma$, temos a situação de **amortecimento subcrítico**: o polinômio tem duas raízes imaginárias conjugadas, $\lambda_1 = -\gamma - i\omega$ e $\lambda_2 = -\gamma + i\omega$, sendo $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. As funções $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ constituem uma base para o espaço de soluções. Assim, temos

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$G(t, s) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{\lambda_1 s + \lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t + \lambda_2 s} \right] = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{\lambda_2 (t-s)} - e^{\lambda_1 (t-s)} \right]$$

   Substituindo os valores de λ_1 e λ_2, teremos

$$G(t, s) = e^{-\gamma(t-s)} \frac{e^{i\omega(t-s)} - e^{-i\omega(t-s)}}{2i\omega}$$

$$G(t, s) = \frac{1}{\omega} e^{-\gamma(t-s)} \operatorname{sen}[\omega(t - s)]$$

2. Quando $\omega_0 < \gamma$, temos a situação de **amortecimento supercrítico**: o polinômio tem duas raízes reais, $\lambda_1 = -\gamma - \beta$ e $\lambda_2 = -\gamma + \beta$, sendo $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Continuamos tendo uma base gerada por $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, e, aproveitando as contas do caso anterior,

$$G(t, s) = e^{-\gamma(t-s)} \frac{e^{\beta(t-s)} - e^{-\beta(t-s)}}{2\beta}$$

$$G(t, s) = \frac{1}{\beta} e^{-\gamma(t-s)} \operatorname{senh}[\beta(t - s)]$$

3. Quando $\omega_0 = \gamma$, temos a situação de **amortecimento crítico**: o polinômio tem uma raiz real dupla $-\gamma$. A solução $y_1(t) = e^{-\gamma t}$ não mais gera o espaço de soluções; devemos completar a base com $y_2(t) = te^{-\gamma t}$, e teremos

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-\gamma t} & te^{-\gamma t} \\ -\gamma e^{-\gamma t} & (1-\gamma t)e^{-\gamma t} \end{vmatrix} = e^{-2\gamma t}$$

$$G(t,s) = e^{2\gamma t}\Big[te^{-\gamma(t+s)} - se^{-\gamma(t+s)}\Big] = (t-s)e^{-\gamma(t-s)}$$

$$G(t,s) = (t-s)e^{-\gamma(t-s)}$$

2.3 Equações inomogêneas de 1ª ordem revisitadas

Seja o operador diferencial $L = D - p(t)$. Obtivemos anteriormente, para o problema $Ly = f$, a solução (1.6):

$$y(t) = Ce^{P(t)} + e^{P(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-P(s)} f(s)\, ds$$

Essa solução tem a mesma forma $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ da solução que construímos para as equações de 2ª ordem: o primeiro termo, $y_h(t)$, é a solução (geral) da equação homogênea $Ly_h = 0$; o segundo, $y_p(t)$, é uma solução particular (arbitrária) de $Ly_p = f$.

Se considerarmos a condição inicial $y(t_0) = y_0$, a forma de solução coincidirá inclusive em termos de condições iniciais. Com a escolha (arbitrária) do extremo inferior t_0 da integral em (1.6), a solução particular $y_p(t)$ se anula no instante inicial. Se também escolhermos $P(t)$ como a primitiva que se anula no instante t_0, ou seja,

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds,$$

a exponencial $e^{P(t)}$ valerá 1 no instante t_0, fazendo com que a solução homogênea $y_h(t)$ tenha o valor C no instante t_0, e portanto podemos identificar C com y_0.

Outra maneira de obter a solução, que nada mais é que o método da variação dos parâmetros para ordem 1, é supor que a solução particular da equação inomogênea tenha a forma $y_p(t) = u(t)y_h(t)$, sendo $y_h(t)$ solução da equação homogênea e $u(t)$ uma função arbitrária a determinar. Substituindo esse *ansatz*[2] na equação diferencial, teremos

$$\begin{aligned} y_p &= uy_h \\ y_p' &= u'y_h + uy_h' \\ Ly_p = y_p' - py_p &= u'y_h + u\underbrace{(y_h' - py_h)}_{=0} = f, \end{aligned}$$

sendo o termo destacado nulo em virtude da equação diferencial $Ly_h = 0$. Assim, $u(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$u'(t)y_h(t) = f(t), \tag{2.33}$$

[2] *Ansatz*, palavra alemã que significa *tentativa*, geralmente indica uma tentativa de solução (um "chute") que, substituída na equação, revela (ou não) ser o resultado correto e as condições nas quais aquela é realmente a solução.

cuja solução é imediata:

$$u(t) = \int \frac{f(t)}{y_h(t)}\, dt \tag{2.34}$$

A solução particular é, então, dada por

$$y_p(t) = y_h(t) \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{y_h(s)}\, ds,$$

ou, usando a expressão explícita para $y_h(t) = e^{P(t)}$,

$$y_p(t) = e^{P(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-P(s)} f(s)\, ds, \tag{2.35}$$

que reproduz a solução encontrada pelo outro método. Podemos reescrever essa solução de forma a evidenciar uma função de Green para o problema de 1ª ordem:

$$G(t,s) = e^{P(t)-P(s)} = \exp\left(\int_{s}^{t} p(t')\, dt'\right) \tag{2.36}$$

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s) f(s)\, ds \tag{2.37}$$

3 Equações de ordem n

Considere uma equação diferencial linear de ordem n, com coeficientes constantes e homogênea, da forma

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{3.1}$$

Em termos de operadores diferenciais agindo sobre a função y, essa equação assume a seguinte forma $(Ly)(t) = 0$:

$$\Big[\big(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I\big)\, y\Big](t) = 0, \tag{3.2}$$

na qual o operador L que age sobre a função y é um polinômio em D, ou seja, $L = p(D)$, com $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Esse polinômio é denominado **polinômio característico** da equação diferencial. Podemos fatorar (em $\mathbb{C}$) esse polinômio em n fatores lineares, correspondendo a n raízes complexas (não necessariamente distintas); como esse polinômio é mônico (o coeficiente do termo de maior grau é 1), podemos escrever essa fatoração como

$$p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n),$$

na qual $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são as raízes (não necessariamente distintas) de p. Assim, a equação diferencial $Ly = 0$ pode ser escrita na forma

$$(D-\lambda_n I)\cdots(D-\lambda_2 I)(D-\lambda_1 I)y = 0 \tag{3.3}$$

(Observe que a fatoração só pode ser feita quando os coeficientes são constantes; caso contrário, o operador diferencial também agiria sobre os coeficientes!)

A fatoração da equação permite que trabalhemos com ela muito mais facilmente. Vamos definir as funções

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{x}_1 - \lambda_1 x_1 \\ x_3 &= \dot{x}_2 - \lambda_2 x_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} - \lambda_{n-1} x_{n-1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Veja que essas funções aparecem naturalmente na equação diferencial:

$$\underbrace{(D-\lambda_n I)\,(D-\lambda_{n-1}I)\cdots\underbrace{(D-\lambda_2 I)\,\underbrace{(D-\lambda_1 I)\overbrace{y}^{x_1}}_{x_2}}_{x_3}}_{x_n} = 0$$

Dessa maneira, convertemos a equação de ordem n em n equações de ordem 1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= \lambda_{n-1} x_{n-1} + x_n \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n \end{aligned} \tag{3.5}$$

Esse sistema pode ser resolvido com facilidade: da última equação, de 1ª ordem e homogênea, x_n sai quase de graça; substituindo x_n na penúltima equação, temos uma equação de 1ª ordem inomogênea, cuja solução também é simples. Podemos assim resolver as n equações de baixo para cima, substituindo o resultado de cada uma na anterior, até chegar à primeira, da qual sairá a função procurada, $y \equiv x_1$.

Observe nesse sistema de equações que, a cada equação resolvida, ganhamos uma constante de integração (lembre-se do método de resolução de equações de 1ª ordem), de modo que a solução final $x_1 \equiv y$ dependerá de n constantes arbitrárias; essa será a solução geral da nossa equação diferencial de ordem n. Constatamos, então, que o espaço de soluções da equação $Ly = 0$ tem dimensão n, coincidindo (como não poderia deixar de ser) com o que já obtivemos para equações de ordem 1 e 2.

Note que, caso a equação em (3.1) fosse inomogênea, ou seja, tivéssemos a equação $Ly = f$ para uma função $f(t)$ conhecida, poderíamos adotar o mesmo método de resolução, com a diferença de que a última equação de (3.5) também seria inomogênea, a saber, $\dot{x}_n = \lambda_n x_n + f$.

■ 3.1 Exemplo: 2ª ordem

Para exemplificar, vamos resolver dessa maneira as equações diferenciais lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes ($\ddot{y}+a\dot{y}+by=0$). Se o polinômio característico $p(x) = x^2 + ax + b$ tem as duas raízes complexas λ_1 e λ_2 (que se relacionam com a e b pela conhecida fórmula de Bhaskara), podemos escrever a equação na forma fatorada $(D - \lambda_2)(D - \lambda_1)y = 0$. Definindo $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{x_1} - \lambda_1 x_1$, teremos o sistema de duas equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Resolvendo a segunda equação, teremos $x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$. A primeira equação, inomogênea, tem sua solução dada pela expressão (1.7):

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda_1 s} x_2(s)\, ds = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t} \int_{t_0}^{t} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)s}\, ds \tag{3.7}$$

A integral do lado direito de (3.7) é muito simples, mas é necessário dividi-la em duas situações: caso as raízes λ_1 e λ_2 sejam diferentes e caso sejam iguais.

Caso as raízes sejam iguais (abandonaremos o índice neste caso e escreveremos $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$), o integrando em (3.7) é constante e igual a 1; logo, a solução para $x_1(t)$ será

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}(t - t_0)$$

e, renomeando as constantes ($C_1 = c_1 - c_2 t_0$, $C_2 = c_2$), teremos a solução geral escrita na forma

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \tag{3.8}$$

Ou seja, quando as duas raízes do polinômio característico coincidem (e são iguais a λ), podemos tomar como base o conjunto das funções $\{e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}\}$.

Caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$, teremos

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_1 t} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_0} \right]$$

Renomeando as constantes convenientemente ($C_2 = \frac{c_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$ e $C_1 = c_1 - C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_0}$), a solução adquire a forma final

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{3.9}$$

que nos diz que uma base de soluções para a equação diferencial é $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$, em que λ_1 e λ_2 são as raízes do polinômio característico da equação.

Outras representações do espaço de soluções

Ainda na situação em que as raízes são distintas, é interessante analisar o caso em que elas têm uma parte imaginária; caso os coeficientes da equação sejam reais (grande maioria dos casos), as raízes são necessariamente conjugadas, ou seja, podem ser escritas como $\lambda_1 = \gamma - i\omega$ e $\lambda_2 = \gamma + i\omega$, com γ e ω reais. Nesse caso, a solução geral pode ser escrita como

$$y(t) = e^{\gamma t} \left(C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t} \right)$$

Lembrando da fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, teremos

$$y(t) = e^{\gamma t} \big[(C_1 + C_2)\cos\omega t + (C_2 - C_1)\operatorname{sen}\omega t \big]$$

e, renomeando $A = C_1 + C_2$ e $B = C_2 - C_1$, a solução pode ser escrita como

$$y(t) = e^{\gamma t} \left(A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t \right). \tag{3.10}$$

Isto nos dá uma outra base de soluções para o problema: $\{e^{\gamma t}\cos\omega t, e^{\gamma t}\operatorname{sen}\omega t\}$. Essa base é geralmente usada no problema do oscilador harmônico, tanto no caso subamortecido, quanto no caso sem amortecimento, no qual as raízes são puramente imaginárias ($\gamma = 0$) e a base se reduz à conhecida $\{\cos\omega t, \operatorname{sen}\omega t\}$.

3.2 O método da variação dos parâmetros, novamente

Vamos considerar uma equação diferencial linear de ordem n, não necessariamente com coeficientes constantes, e inomogênea:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t), \tag{3.11}$$

que também pode, de maneira equivalente, ser expressa como $Ly = f$, para o operador $L = D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D + a_0(t)$. Suporemos conhecida uma base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ do espaço de soluções de $Ly = 0$. Nosso objetivo aqui será construir um método de encontrar uma solução particular da equação $Ly = f$, o que, como já vimos, permite que encontremos todas as soluções da equação. (Vimos isso no contexto de equações de 2ª ordem, mas o raciocínio utilizado para obtermos essa conclusão não dependia da ordem da equação com a qual estávamos tratando.)

A solução geral do problema homogêneo associado é do tipo $y(t) = c_1y_1(t) + \cdots + c_ny_n(t)$. Procuraremos, então, soluções particulares da forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + \cdots + u_n(t)y_n(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)y_j(t), \tag{3.12}$$

na qual $u_1, \ldots, u_n$ são funções, a princípio arbitrárias. Nossa "escolha de calibre" desta vez será um pouco mais complicada, pois, mais uma vez, a equação diferencial só nos dá um vínculo entre as n funções $u_1, \ldots, u_n$; precisamos de mais $n-1$ vínculos para termos um sistema de equações determinado. Vamos exigir, analogamente ao caso de 2ª ordem, que as derivadas de y_p até ordem $n-1$ tenham a forma

$$y_p^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)y_j^{(k)}(t),\ 1 \le k \le n-1, \tag{3.13}$$

ou seja, proibiremos as derivadas de u_j de figurar na expressão das derivadas de y_p. Calculando sucessivamente as derivadas de y_p, teremos

$$y_p'(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j'(t)y_j(t) + \sum_{j=1}^{n} u_j(t)y_j'(t),$$

que nos leva a anular a primeira somatória. Continuando a derivada (apenas para a segunda somatória), temos

$$y_p''(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j'(t)y_j'(t) + \sum_{j=1}^{n} u_j(t)y_j''(t),$$

que nos leva, novamente, a anular a primeira somatória. Perceba que assim sucede até o final:

$$y_p^{(n-1)} = \frac{d}{dt}y_p^{(n-2)} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n} u_jy_j^{(n-2)}\right] = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} u_j'y_j^{(n-2)}}_{=0} + \sum_{j=1}^{n} u_jy_j^{(n-1)}$$

$$y_p^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} u_j'y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} u_jy_j^{(n)} \tag{3.14}$$

Resumindo, as condições que adotamos até aqui foram as seguintes:

$$\sum_{j=1}^{n} u_j' y_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j' = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-2)} = 0$$

Agora, substituindo y_p e suas derivadas na equação diferencial, teremos

$$y_p^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k y_p^{(k)} = f$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} u_j y_j^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{j=1}^{n} u_j y_j^{(k)} = f$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} u_j \underbrace{\left[y_j^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k y_j^{(k)} \right]}_{=0} = f$$

O termo destacado na última equação anula-se pois ele corresponde justamente ao operador L aplicado a y_j, e todos os y_j são soluções da equação homogênes $Ly_j = 0$. Agora sim temos n equações independentes que permitem encontrar os u_j':

$$\sum_{j=1}^{n} u_j' y_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j' = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-2)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} u_j' y_j^{(n-1)} = f \tag{3.15}$$

Ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

A matriz que aparece do lado esquerdo da equação é a matriz wronskiana $\mathbb{W}(t)$ relativa ao conjunto de funções $\{y_1, \ldots, y_n\}$; como esse conjunto é uma base (portanto é linearmente independente), a matriz possui inversa, e podemos usá-la para isolar o vetor coluna $U' := (u_1', \ldots, u_n')$:

$$U' = (u_1', \ldots, u_n') = \mathbb{W}^{-1}(0, \ldots, 0, f)$$

A multiplicação pelo vetor coluna $(0, \ldots, 0, f)$ extrai a última coluna da inversa (multiplicada por f). Vamos encontrá-la pela fórmula da inversa em termos dos cofatores:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)^T.$$

A última coluna da inversa será formada pelos cofatores da última *linha* de $\mathbb{W}$ (note a transposição na fórmula!), ou seja, os elementos $(\operatorname{cof} \mathbb{W})_{nj}$). O elemento $(\operatorname{cof} \mathbb{W})_{nj}$ será o determinante da matriz obtida de $\mathbb{W}$ eliminando-se a última linha e a j-ésima coluna, multiplicado pelo sinal $(-1)^{n+j}$ (que também pode ser escrito como $(-1)^{n-j}$). Denotemos esse determinante por W_j. Note que esse determinante equivale ao wronskiano das $n-1$ funções que restam quando se retira y_j do conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Assim, teremos (lembre-se de que $\det \mathbb{W} = W$)

$$U' = \frac{f}{W}\big((-1)^{n-1}W_1, (-1)^{n-2}W_2, \ldots, -W_{n-1}, W_n\big)$$

ou, componente por componente,

$$u_j'(t) = (-1)^{n-j}\frac{W_j(t)}{W(t)}f(t) \tag{3.17}$$

Essa equação pode ser integrada diretamente para obtermos as funções $u_j(t)$:

$$u_j(t) = (-1)^{n-j}\int_{t_0}^{t}\frac{W_j(s)}{W(s)}f(s)\,ds \tag{3.18}$$

ou para obtermos a solução particular em sua forma final:

$$y_p(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t)y_j(t) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}y_j(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_j(s)}{W(s)}f(s)\,ds \tag{3.19}$$

Com isso, podemos escrever a solução particular em termos de uma função de Green:

$$y_p(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s)f(s)\,ds \tag{3.20}$$

$$G(t,s) = \frac{(-1)^n}{W(s)}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j y_j(t)W_j(s) \tag{3.21}$$

■ 3.3 A exponencial de uma matriz e a forma canônica de Jordan

♦ *Esta seção ainda está incompleta!*

Com as funções $x_1, \ldots, x_n$ que definimos, transformamos uma equação diferencial de ordem n (para a função $y \equiv x_1$) num sistema de n equações de primeira ordem (3.5) envolvendo as funções $x_1, \ldots, x_n$. Esse sistema pode ser escrito de forma matricial: se definirmos o vetor coluna $X = (x_1, \ldots, x_n)$, o sistema pode ser escrito de maneira matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

representada abreviadamente como $\dot{X} = AX$, em que A é a matriz $(n \times n)$ em (3.22).

Repare na semelhança entre a equação $\dot{X} = AX$ e as equações de 1ª ordem que já vimos: $\dot{y} = \lambda y$, cuja solução era do tipo $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$. Seria possível definir uma matriz "e^{At}" de forma que a solução para a equação matricial seja $X(t) = e^{At}X_0$, na qual X_0 é um vetor coluna?

A resposta é afirmativa: dada uma matriz A, definimos a exponencial e^{At} pela mesma série que define a exponencial de um número complexo:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \tag{3.23}$$

Para mostrar que isso realmente fornece a solução, precisamos primeiro verificar que essa série realmente faz sentido (isto é, se ela converge); não é difícil demonstrar esse fato, mas a demonstração não é muito interessante do ponto de vista dos nossos objetivos. Vamos apenas verificar que $X(t) = e^{At}X_0$ satisfaz a equação $\dot{X} = AX$. Derivando termo a termo, temos

$$X(t) = e^{At}X_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n X_0 = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n X_0$$

$$\dot{X}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} A^n X_0 = A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} X_0 \right) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n X_0 = AX(t)$$

Calcular a exponencial de uma matriz em geral não é uma tarefa fácil. No entanto, há vários casos em que a conta se simplifica bastante:

1. Se A é **diagonal**, $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, suas potências A^k são facilmente calculáveis: simplesmente se eleva cada elemento da diagonal à potência k. Assim, na expansão de e^A para cada elemento λ_j da diagonal, aparecerá exatamente a série da exponencial e^{λ_j}; como consequência, teremos

$$e^A = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

2. Ainda que A não seja diagonal, mas seja **diagonalizável**, ou seja, caso exista uma matriz P invertível tal que $P^{-1}AP = B$ seja diagonal, a exponencial de A é bastante simples. Ao calcular uma potência A^k, teremos

$$A^k = (PBP^{-1})^k = \underbrace{PBP^{-1} \cdot PBP^{-1} \cdots PBP^{-1}}_{k \text{ vezes}} = PB^kP^{-1},$$

pois os fatores $P^{-1}P$ que aparecem no meio da expansão se cancelam. Dessa maneira, na exponencial de A, os fatores P e P^{-1} aparecem em volta de todos os termos, de modo que podem ser colocados em evidência, restando no meio a exponencial de B, que é facilmente calculada pois B é diagonal:

$$e^A = Pe^BP^{-1}.$$

3. Se A é **nilpotente**, ou seja, existe algum número r tal que $A^r = 0$ (a matriz tem alguma potência igual à matriz nula), então a série que define a exponencial e^A pára na última potência não-nula de A: se definirmos r como o *menor* inteiro tal que $A^r = 0$ (r é denominado *índice de nilpotência* de A), então a série é truncada no termo de A^{r-1}. Com isso, só precisamos calcular as primeiras $r-1$ potências de A:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}A^{r-1}.$$

4. Se todas as matrizes fossem diagonalizáveis ou nilpotentes, nossos problemas estariam resolvidos; mas existem matrizes que não são nem diagonalizáveis nem nilpotentes. Porém, toda matriz pode ser escrita como a soma de uma matriz M diagonalizável (em $\mathbb{C}$) com uma matriz N nilpotente, como consequência do teorema da **decomposição de Jordan**. Esse teorema também afirma algo bem importante: essas duas matrizes *comutam*, ou seja, $MN = NM$. Com isso, dada uma matriz A em sua decomposição de Jordan $A = M + N$, temos
$$e^A = e^{M+N} = e^M e^N,$$
e tanto e^M quando e^N são calculáveis de acordo com os itens anteriores. Onde entra o fato de que M e N comutam? Na passagem $e^{M+N} = e^M e^N$, que fizemos silenciosamente — ela só pode ser feita quando M e N comutam. Caso contrário, teríamos também (pela comutatividade da soma) $e^M e^N = e^{M+N} = e^{N+M} = e^N e^M$, o que não vale em geral para matrizes que não comutam!

Veja que a matriz A do nosso sistema em (3.22) tem uma forma muito simples: na diagonal principal aparecem as raízes do polinômio característico, a diagonal acima da principal é preenchida por uns, e as entradas restantes são nulas. Podemos decompô-la como soma de duas matrizes: uma matriz diagonal $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e uma matriz N que tem a supradiagonal preenchida por uns (com o restante das entradas nulo). Veja que temos $A = M + N$ com M diagonal e N nilpotente; no entanto, essa *não* é a forma da decomposição de Jordan, pois M e N *não comutam*! É fácil verificar que MN é uma matriz com os elementos $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ na supradiagonal; NM tem na supradiagonal os elementos $(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Elas só coincidem caso todos os λ_j sejam iguais!

♦ *Esta seção ainda está incompleta!*