Série de Dyson de uma matriz que comuta consigo mesma em instantes diferentes

Eduardo S. Dobay

12 de setembro de 2010
(1ª versão: 25 de setembro de 2009)

Seja $A(t)$ uma matriz $m \times m$ integrável, de entradas complexas e tal que $A(t)$ comuta com $A(t')$ para todos t, t'. A matriz de Dyson de A é dada por

$$D(t) \equiv D(t, t_0) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)\, dt_n\, dt_{n-1} \cdots dt_1 \tag{1}$$

Mostraremos que, neste caso (A comuta consigo mesma para instantes diferentes), a matriz de Dyson tem a forma a seguir (omitimos a dependência explícita em t_0 para não carregar demais a notação):

$$E(t) := \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau \right) \tag{2}$$

Por conveniência de notação, definimos $B(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau$, e assim temos

$$E(t) = \exp B(t) = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B(t)^k = \mathbf{1} + B(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B(t)^k \tag{3}$$

Como as operações de integração e derivação de matrizes são definidas elemento a elemento, podemos afirmar que $B'(t) = A(t)$. No entanto, ao derivar potências de $B(t)$, precisamos de especial cuidado. Notemos primeiro que $B(t)$ comuta com $A(t)$:

$$A(t)B(t) = A(t) \int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} A(t)A(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)A(t) d\tau = \left[\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau \right] A(t) = B(t)A(t)$$

Derivar $B(t)^k$ é derivar um produto de k matrizes — vamos denominá-las $B_1, \ldots, B_k$ para facilitar a identificação e usar a regra do produto para o cômputo da derivada:

$$\frac{d}{dt}(B_1 B_2 \cdots B_k) = (B_1' B_2 \cdots B_k) + (B_1 B_2' \cdots B_k) + \cdots + (B_1 B_2 \cdots B_{k-1} B_k')$$

Agora voltamos a escrever $B_j = B(t)\ \forall t$, e observamos que $B_j' = B'(t) = A(t)$ comuta com B_i para quaisquer i, j. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B(t)^k &= A(t)B(t)^{k-1} + B(t)A(t)B(t)^{k-2} + \cdots + B(t)^{k-2}A(t)B(t) + B(t)^{k-1}A(t) \\ &= kA(t)B(t)^{k-1} \end{aligned} \tag{4}$$

Daqui vemos que

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{d}{dt}\left[\mathbf{1} + B(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} B(t)^k \right] = B'(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d}{dt} B(t)^k = A(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} kA(t)B(t)^{k-1} \\ &= A(t) \left[\mathbf{1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} B(t)^{k-1} \right] = A(t) \left[\mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} B(t)^j \right] = A(t)E(t) \end{aligned} \tag{5}$$

Diretamente da definição percebemos que $E(t_0) = \exp \mathbf{0} = \mathbf{1}$, e portanto $E(t)$ satisfaz a mesma equação diferencial e as mesmas condições iniciais que $D(t) \equiv D(t, t_0)$ (considerado como função apenas de t, com t_0 fixo, o que significa que a derivada abaixo é, na realidade, uma derivada parcial em relação a t):

$$\begin{cases} D'(t) = A(t)D(t) \\ D(t_0) = \mathbf{1} \end{cases} \tag{6}$$

Podemos encarar essa equação na matriz $D(t)$ como um conjunto de m equações nos vetores-coluna $D_1(t), \ldots, D_m(t)$ que formam a matriz $D(t)$:

$$\begin{cases} D_j'(t) = A(t)D_j(t) \\ D_j(t_0) = \mathbf{e}_j \end{cases}, \ j = 1, \ldots, m \tag{7}$$

Perceba que a multiplicação à esquerda por $A(t)$ se "distribui" pelas colunas de $D(t)$, permitindo que realmente separemos a equação diferencial, e a condição inicial fica expressa em termos das colunas da matriz identidade: $\mathbf{e}_j$ é a j-ésima coluna da matriz identidade, que contém o elemento 1 na j-ésima linha e 0 nas demais posições.

Com essa separação, podemos usar o teorema de existência e unicidade para concluir que o problema (6) tem solução única, e portanto $E(t) = D(t)$.